<u>*Logika formalna – wprowadzenie*</u>

Ponieważ punkty 10.i 12. nie były omawiane na zajęciach, dlatego można je przeczytać fakultatywnie.

1. Zdanie logicznie prawdziwe (Prawda logiczna) – Zdanie, którego analityczność ma źródło wyłącznie w jego strukturze oraz w znaczeniu występujących w nim stałych logicznych.

2. Funkcja zdaniowa – wyrażenie zawierające zmienną (nazwową lub zdaniową), które po podstawieniu w miejsce zmiennej (odpowiednio nazwy lub zdania) przekształca się w zdanie. Np.:

A) „X jest człowiekiem". Gdy w miejsce zmiennej nazwowej „x" podstawimy nazwę „Sokrates", otrzymamy zdanie: „Sokrates jest człowiekiem".
B) „p → q". Gdy w miejsce zmiennej zdaniowej „p" podstawimy zdanie „Jutro będzie ładna pogoda", a w miejsce zmiennej zdaniowej „q" podstawimy zdanie: „Wyjadę na wycieczkę", to otrzymamy zdanie: „Jeśli jutro będzie ładna pogoda, to wyjadę na wycieczkę"

Interpretacja funkcji zdaniowej φ – to dowolne zdanie, które powstaje z tej funkcji zdaniowej przez wstawienie w miejsce wszystkich zmiennych wyrażeń stałych.

3. Tautologia logiki L – to taka funkcja zdaniowa zapisana w języku L, która przy każdej interpretacji staje się zdaniem prawdziwym.

lub:

Tautologią logiki L nazywamy taką funkcję zdaniową L, której każde wartościowanie przyjmuje wartość 1.

W oparciu o pojęcie tautologii możemy wrócić do pojęcia prawdy logicznej. Prawda logiczna jest to takie twierdzenie języka L, które jest interpretacją jakiejś tautologii L

4. Język KRZ-u (Klasycznego rachunku zdań):

I. Słownik
   a. proste zmienne zdaniowe: p, q, r, s, t
   b. spójniki logiczne: ¬,∧,∨, ,→,↔ (kolejność mocy wiązania)

c. nawiasy: ( ), [ ], { }

II. Wyrażeniami sensownymi KRZ są:

a. proste zmienne zdaniowe

b. jeśli α i β są wyrażeniami sensownymi, to wyrażeniami sensownymi są także: $\neg\alpha$, $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$, $\alpha\rightarrow\beta$, $\alpha\leftrightarrow\beta$

III. Semantyka KRZ.

a. W KRZ po prostu przyjmujemy, że p jest prawdziwe w danym przypadku (w języku angielskim – *case*. Stąd dany przypadek będziemy określać za pomocą symbolu „c"). To założenie nie determinuje koncepcji prawdy, czyli kwestii „jak" dane zdanie staje się prawdziwe.

„$c \models_1 p$" – p jest prawdziwe w c

„$c \neg\models_1 p$" – p nie jest prawdziwe w c

Dla każdego przypadku (dla każdej sytuacji) c jest tak, że:

$c \models_1 p \vee c \models_1 \neg p$

b. Warunki prawdziwości dla funktorów prawdziwościowych:

Koniunkcja: $c \models_1 p \wedge q$ wtw. (wtedy i tylko wtedy, gdy) $c \models_1 p$ i $c \models_1 q$

Alternatywa: $c \models_1 p \vee q$ wtw. $c \models_1 p$ lub $c \models_1 q$

Negacja: $c \models_1 \neg p$ wtw. $c \neg\models_1 p$

<u>Można wyrazić to samo za pomocą tabelek prawdziwościowych.</u>

5. Zbiór wartości semantycznych V {1, 0} reprezentuje prawdę i fałsz. Poszczególne przypadki okazują się funkcjami ze zdań logiki L do wartości V. v(p) = 1 lub v(p) = 0. Warunek prawdziwości zdania p możemy zdefiniować następująco: p jest prawdziwe wtw. v(p) = 1. Możemy zdefiniować też warunki prawdziwości zdań złożonych.

$v(A \wedge B) = 1$ wtw. $v(A) = 1$ i $v(B) = 1$

$v(A \vee B) = 1$ wtw. $v(A) = 1$ lub $v(B) = 1$

$v(\neg A) = 1$ wtw. $v(A) = 0$

Dla aparatu logicznego interesujące jest tylko to, czy zdanie jest prawdziwe czy fałszywe – z punktu widzenia logiki wszystkie zdania są sobie równe. Od takich rozważań nie jest daleko do interpretacji, według których właściwie operujemy tylko dwoma przedmiotami: jedynką i zerem (1, 0), i że taka operacja jest rodzajem operacji algebraicznej. George Boole, który jako pierwszy w ten sposób spojrzał na logikę, nie miał pojęcia, że jego zasady algebraiczne staną się kiedyś podstawą rozwoju komputera. Ponieważ redukują związki logiczne do relacji między cyframi, czyli kodują cyfrowo, można je łatwo realizować w elektronicznych układach przełączających.

6. Wynikanie logiczne

B jest logiczną konsekwencją A (B wynika logicznie z A) wtw. gdy nie ma żadnego przypadku c takiego, że v (A) = 1, ale v (B) = 0.

lub:

Wynikanie logiczne to relacja, jaka zachodzi między zdaniami (funkcjami zdaniowymi) ze względu na ich formę logiczną (kształt, strukturę, postać) a nie ze względu na treść. Tą formą logiczną, która jest podstawą wynikania logicznego jest zawsze jakaś tautologia o postaci implikacyjnej. Ze zdania A na gruncie logiki L wynika zdanie B wtw., gdy implikacja A→B jest prawdą logiczną na gruncie logiki L.

$A \models B$ wtw., gdy „A→B” $\mathcal{E}$ VER_L

7. Ważny argument – jest to argument, w którym nie można znaleźć kontrprzykładów.

8. Przykłady prawa logicznych:

Prawo wyłączonego środka: $\vdash A \vee \neg A$

Prawo niesprzeczności: $\vdash \neg (A \wedge \neg A)$

Modus ponens: $A \rightarrow B, A \vdash B$

Modus tollens: $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$

Sylogizm ze względu na alternatywę: $A \vee B, \neg A \vdash B$

Kontrapozycji: $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$

$\neg A, A \vdash B$ (ze sprzeczności wynika wszystko)

$A \vdash A \vee B$

$A, B \vdash A \wedge B$

Reguły odrywania: $A \wedge B \vdash A$

Prawa de Morgana: $\neg (A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$

$\neg (A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$

Podwójnej negacji: $\neg\neg A \vdash A$

9. Metoda zerojedynkowa

Przykłady do przećwiczenia:

Jeżeli filozofowie są humanistami, to każdy filozof nie ma pojęcia o logice. Nieprawda, że każdy filozof nie ma pojęcia o logice, zatem nieprawda, że każdy filozof jest humanistą.

p-każdy filozof jest humanistą

q-każdy filozof nie ma pojęcia o logice

$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

Jeżeli Jan jest studentem, to Jan posiada indeks. Jan nie posiada indeksu, zatem nieprawda, że Jan jest studentem.

$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$

Jan jest mężczyzną, bo Jan jest mężczyzną lub kobietą, ale Jan nie jest kobietą.

$(p \vee q) \wedge \neg q \rightarrow p$

10. Dowodzenie

Dowody dzielimy na zwykłe i założeniowe (wprost i nie wprost). Składa się z założeń dowodu, dołączania nowych wierszy do dowodu, reguł dotyczących końca dowodu.

A. *Dowodem zwykłym dla twierdzenia β nazywamy taki ciąg wyrażeń zdaniowych C, który spełnia 3 warunki:*

1. *Żaden wyraz dowodu nie jest założeniem dowodu*
2. *Wyrazami C są (1) twierdzenia wcześniej przyjęte (2) wyrażenia zdaniowe wynikające z wcześniejszych wyrazów tego ciągu na podstawie reguł wnioskowania*

3. *Ostatnim wyrażeniem C jest β, co stanowi koniec dowodu.*

B. *Dowodem założeniowym wprost dla twierdzenia o postaci T (jest to postać implikacyjna: $\beta_1 \rightarrow [\beta_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\beta_{k-1} \rightarrow \beta_k)])$, nazywamy taki ciąg wyrażeń zdaniowych C, który spełnia następujące warunki:*

1. *Początkowymi wyrazami C są poprzedniki T jako założenia dowodu*
2. *(Jak w A2)*
3. *Ostatnim wyrazem C jest końcowy następnik dowodzonej implikacji T - β_k*

C. *Dowodem założeniowym nie wprost dla twierdzenia β nazywamy ciąg C, który spełnia następujące warunki:*

   1. *Pierwszym wyrazem C jest wyrażenie sprzeczne z dowodzonym twierdzeniem β jako założenie dowodu nie wprost*
   2. *Jak w A2*
   3. *Koniec dowodu następuje, gdy w ciągu C pojawia się para wyrażeń sprzecznych.*

Reguły wnioskowania:

- Opuszczania koniunkcji (OK) $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$

- Dołączania koniunkcji (DK) $\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta$

- Opuszczania alternatywy (OA) $\alpha \vee \beta \vdash \alpha$

- Dołączania alternatywy (DA) $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$

- Opuszczania implikacji (Reguła odrywania) (RO) $\alpha, \alpha \rightarrow \beta \vdash \beta$

- Opuszczania równoważności (OE) $\alpha \leftrightarrow \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

- Dołączania równoważności (DE) $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \alpha \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$

11. Klasyczny Rachunek Predykatów (KRP).

Weźmy zdania: „Dobrzy studenci zdają egzaminy” oraz „Źli studenci mają poprawki”. W KRZ możemy sformalizować to zdanie do formy „A i B”, która nie jest satysfakcjonująca. Widzimy, że ww. zdania mają więcej ze sobą wspólnego. Używają np. tego samego predykatu („być studentem”). Dlatego KRP wnika głębiej w strukturę logiczną zdania, uwzględniając, jakie predykaty występują w zdaniu. Predykat (nazwa generalna) może odnosić się zarówno do większej liczby przedmiotów, bądź też do jednego. W KRP występują więc kwantyfikatory: ogólny i egzystencjalny

Sx – x jest studentem

Dx – x jest dobrym studentem

Ex – x zdaje egzamin

Px – x ma poprawkę.

∃xSx – istnieje taki x, że jest studentem

ΛxSx – dla każdego x, x jest studentem

Możemy dokonać teraz formalizacji:

$\Lambda x\{[(Sx \wedge Dx) \rightarrow Ex] \wedge [(Sx \wedge \neg Dx) \rightarrow Px]\}$

Jak napisać zdanie: „Wszyscy klerycy drugiego roku to dobrzy studenci”?

Kx – x jest klerykiem drugiego roku

$\Lambda x\ (Kx \rightarrow Dx)$

Między kwantyfikatorami istnieją ciekawe związki:

$\Lambda xDx \leftrightarrow \neg\exists x\neg Dx$ (Wszyscy studenci są dobrzy = Nie ma złych studentów)

$\neg\ \Lambda xDx \leftrightarrow \exists x\neg Dx$ (Nie wszyscy studenci są dobrzy = Istnieją źli studenci)

$\exists xDx \leftrightarrow \neg\Lambda xDx$ (Istnieją dobrzy studenci = Nie wszyscy studenci są źli)

$\neg\exists xDx \leftrightarrow \Lambda x\neg Dx$ (Nie istnieją dobrzy studenci = Wszyscy studenci są źli)

12. Aby otrzymać KRP należy:

1) *Rozszerzyć słownik KRZ*
2) *Rozszerzyć zbiór reguł pierwotnych KRZ*

Ad 1) Do słownika KRZ należy dodać:

- *Zmienne indywidualne: x, y, z, ….*
- *Stałe nazwowe: a, b, c, …*
- *Zmienne predykatowe, wieloargumentowe: F, G, H, ….*
- *Kwantyfikatory: egzystencjalny i ogólny (Ǝ, Λ)*

Ad 2) Do reguł KRZ należy dodać:

- *α (v) ├ Λv α (v) (dołączania kwantyfikatora ogólnego) [choć „Fx → ΛxFx" nie jest tautologią KRP]. Warunkiem stosowania tej reguły jest to, że v nie jest zmienną wolną*
- *α (ω) ├ Ǝv α (v) (dołączania kwantyfikatora egzystencjalnego)*
- *Λv α (v) ├ α (ω) (odrywania kwantyfikatora ogólnego)*
- *Ǝv α (v) ├ α (s) (odrywania kwantyfikatora egzystencjalnego)*

Gdzie:

v-zmienna nazwowa

s-stała nazwowa

ω-stała lub zmienna nazwowa