Warszawskie Studia Teologiczne
X/1997, 189-196

Ks. Mieczysław LUBAŃSKI**Błąd! Nie zdefiniowano zakładki.**

GEOMETRIA A KLASYCZNA KONCEPCJA PRAWDY

Termin geometria (*ge* - ziemia, *metreo* - mierzę) znaczy dosłownie mierzenie ziemi. Przyjmuje się, że geometrię zapoczątkowała konieczność dokonywania ustaleń granic pól po okresowych wylewach Nilu. Nie negując tego faktu, zauważmy że już w młodszym okresie kamiennym rozwinęło się upodobanie do ornamentyki geometrycznej. Można więc przyjąć, że początki geometrii sięgają czasów bardzo dawnych. Zaczątki wiedzy geometrycznej spotykamy także w starożytnej Babilonii. Grekom zawdzięczamy przejście od praktyki pomiarów geometrycznych do wiedzy naukowej. Tales to znany nam pierwszy uczony grecki, który interesował się geometrią. Po nim czynili to inni. Już wówczas geometria była nauką o własnościach figur geometrycznych (trójkąty, prostokąty, kule, walce, stożki itp.), względnie o własnościach przestrzeni. Aksjomatyczne ujęcie geometrii pochodzi od Euklidesa. Zostało ono zamieszczone w jego dziele *Stoicheia* (*Elementy*), składającym się z 13 ksiąg. O powszechnym uznaniu dla osiągnięcia Euklidesa może świadczyć fakt, iż *Elementy* doczekały się około 1700 wydań. Wiedzę geometryczną w tym dziele zawartą zwiemy obecnie geometrią euklidesową. Scharakteryzujmy ją pokrótce.

1. Geometria euklidesowa

Z dzisiejszego punktu widzenia aksjomatyzacja jakiejś gałęzi wiedzy polega na ustaleniu tzw. terminów (pojęć) pierwotnych, czyli terminów przyjętych bez definicji, oraz tzw. aksjomatów (postulatów), czyli zdań przyjętych bez dowodu. Wszystkie inne terminy winny zostać określone przy pomocy terminów pierwotnych. Każde zdanie, które jest logicznym wnioskiem z przyjętych aksjomatów, zwie się twierdzeniem teorii.

Gdy idzie o geometrię euklidesową, to współcześnie przyjmuje się pięć terminów pierwotnych oraz osiemnaście aksjomatów[1]. Dla celu przyświecającemu temu opracowaniu poprzestaniemy na wymienieniu trzech pojęć pierwotnych oraz pięciu aksjomatów. Idąc za wzorem Euklidesa jako pojęcia pierwotne przyjmiemy punkt, linię i powierzchnię, zaś za aksjomaty - zdania następujące:

(1) Przez każde dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.

(2) Ograniczoną prostą można ciągle przedłużać po prostej.

(3) Z każdego punktu na płaszczyźnie każdym rozwarciem można zakreślić okrąg koła.

(4) Przez każde trzy różne punkty nie leżące na jednej prostej przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.

(5) Przez punkt leżący poza prostą przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do danej prostej.

Jak wspomnieliśmy przed chwilą, twierdzeniami geometrii będą logicznie poprawne wnioski wynikające z przyjętych aksjomatów.

Euklides postąpił nieco inaczej, niż to czynimy obecnie. Podał mianowicie intuicyjne rozumienie terminów pierwotnych, innymi słowy, podał ich określenie, czy też ich znaczenie. W szczególności uznał, że[2]:

Punktem jest to, co nie ma części.

Linia jest to długość bez szerokości.

Powierzchnią jest to, co ma długość i szerokość.

Określił także prostą i płaszczyznę. Mianowicie: Prosta to linia, która jest jednakowo położona względem punktów na niej leżących; płaszczyzna to powierzchnia, która jest jednakowo położona względem prostych na niej leżących. Nadto posługiwał się nazwą postulat w miejsce naszego terminu aksjomat oraz odróżniał postulaty od aksjomatów[3].

Jest widoczne, że przy powyższym rozumieniu terminów pierwotnych aksjomaty geometrii stają się zdaniami prawdziwymi. Co więcej, jesteśmy przekonani, że inaczej być nie może. Konsekwentnie twierdzenia geometrii oddają zależności zachodzące w realnej przestrzeni. Przestrzeń jest więc euklidesowa. Obowiązuje w niej geometria Euklidesa.

---

[1] K. BORSUK, W. SZMIELEW, *Podstawy geometrii*, (Wydanie nowe), Warszawa: PWN 1970; A.D. ALEKSANDROW, Co to jest geometria, *Wiadomości Matematyczne* 1(1955-1956), 4-46.

[2] M. J. WYGODSKI, 'Elementy' Euklidesa, w: *O elementach Euklidesa*, (Zbiór artykułów), Warszawa: PWN 1956, 27.

[3] *Tamże*, 27, 46-47.

Tego rodzaju intuicyjne rozumienie terminów pierwotnych wypowiedziane *explicite* przez Euklidesa akceptowano powszechnie jeszcze przed Euklidesem. Bo przecież treść terminów geometrycznych nasunęło doświadczenie potoczne, kiedy rozważano figury płaskie i przestrzenne, w szczególności bryły. Granice tych ostatnich nazwano powierzchniami, przypisując im tylko dwie własności: długość i szerokość. Granicami powierzchni były linie, które mają jedynie długość bez szerokości. Granicami linii były punkty. Takie rozumienie terminów pierwotnych było przyjmowane bez zastrzeżeń w starożytności, w średniowieczu, a także w czasach nowożytnych. Aksjomaty geometrii traktowano jako pewniki, tj. niepodważalne prawdy w odniesieniu do przestrzeni fizycznej.

Ujęcie aksjomatyczne geometrii dokonane przez Euklidesa zostało uznane za wybitne osiągnięcie naukowe, zarówno merytoryczne jak i metodologiczne, które m.in. dało początek nowemu sposobowi budowania nauki. Przez wiele stuleci zwano go budowaniem nauki na sposób geometrii, *more geometrico*. Taki sposób nazewnictwa stosowali Blaise Pascal (1623 - 1662), Baruch Spinoza (1632 - 1677). Ten ostatni - jak powszechnie wiadomo - "metodą geometryczną" opracował swoje słynne dzieło Etyka.

Przeświadczenie o tym, że geometria euklidesowa podaje wiedzę o rzeczywistej przestrzeni podzielano do końca XVIII w. Immanuel Kant (1724 - 1804) twierdzenia geometrii traktował jako klasyczne przykłady zdań syntetycznych *a priori*, a więc zdań, które orzekają o świecie zewnętrznym (w tym przypadku o przestrzeni fizycznej), zostały zaś otrzymane bez odwoływania się do doświadczenia, czyli apriorycznie. Innymi słowy, geometria euklidesowa była traktowana jako jedyna możliwa geometria.

Aksjomat piąty, któremu nadano z biegiem czasu nazwę aksjomatu Euklidesa, a zwie się go również aksjomatem o równoległych, budził pewne wątpliwości. Nie wydawał się tak oczywisty, jak pozostałe aksjomaty. Próbowano go wyprowadzić z pozostałych aksjomatów. Wielokrotnie ponawiane próby nie doprowadziły do upragnionego rezultatu. Historia wysiłków intelektualnych zmierzających do jego udowodnienia jest pouczająca. Doprowadziła bowiem do nowego, szerszego spojrzenia na system aksjomatyczny i jednocześnie do zrozumienia, iż wspomniany aksjomat jest niezależny od pozostałych aksjomatów geometrii. To zaś od strony czysto logicznej otworzyło drogę do powstania geometrii nieeuklidesowych. Przyjrzyjmy się wspomnianym zmaganiom intelektualnym.

2. Piąty postulat Euklidesa

Próby udowodnienia aksjomatu o równoległych trwały co najmniej dwieście lat. John Wallis (1616 - 1703) wykazał, pewnik Euklidesa jest równoważny istnieniu trójkątów podobnych. Girolamo Saccheri (1667 - 1733) podał w swej pracy *Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus, quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia* (r. 1733) rozumowanie, które jego zdaniem miało być dowodem pewnika Euklidesa. Zaproponowany dowód okazał się niepoprawny. W wieku XVIII wykazano m.in. iż aksjomat ten jest równoważny każdemu z poniższych twierdzeń:

1. Suma kątów trójkąta jest równa dwu kątom prostym.

2. Odcinki równoległe zawarte między dwoma prostymi równoległymi są równe.

3. Proste równoległe są równoodległe, tj. jeżeli proste k oraz t nie przecinają się, to odległości wszystkich punktów prostej k od drugiej prostej są równe.

Znaczy to innymi słowy, że wspomniane twierdzenia były dowodzone przy założeniu aksjomatu Euklidesa, z nich zaś z kolei uzyskiwano dowód aksjomatu Euklidesa. Zatem od strony logicznej istniejąca tu sytuacja przedstawiała błędne koło w dowodzeniu. Zakładając aksjomat o równoległych różne pomysłowe ciągi rozumowań prowadziły do jego udowodnienia. Otrzymano wiele podobnego rodzaju równoważności.

Toteż skoro liczne próby podejmowane dla udowodnienia aksjomatu o równoległych okazywały się być nie poszukiwanym dowodem, lecz wykazywaniem jego równoważności z innymi twierdzeniami geometrii, zaczęto domyślać się jego niezależności od pozostałych aksjomatów. A jeśli jest tak, to przyjmując zaprzeczenie aksjomatu o równoległych, zachowując zaś niezmienione pozostałe aksjomaty, otrzymamy logicznie niesprzeczny układ aksjomatów. Innymi słowy, możliwa jest geometria nieeuklidesowa, tj. geometria, w której nie obowiązuje aksjomat Euklidesa o równoległych

Dwie pierwsze próby zbudowania nowego systemu geometrii podjęli Nikołaj I. Łobaczewski (1793 - 1856) i Janos Bolyai (1802 - 1860). Pierwszy z nich ogłosił po rosyjsku w r. 1830 pracę O podstawach geometrii, drugi - w roku 1832 *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens*. Obie te rozprawy nie zostały zauważone przez ówczesną naukę. Ich autorzy spotkali się z obojętnością[4].

Świadczy to niewątpliwie o tym jak utrwalone w świadomości uczonych było intuicyjne rozumienie terminów pierwotnych, co pociągało za sobą - jak pamiętamy - przeświadczenie o absolutnej prawdziwości aksjomatów geometrii Euklidesa. Toteż nie dziwi zbytnio fakt, że jeszcze w pierwszej połowie XIX w. ukazywały się prace, w których usiłowano wykazać zależność aksjomatu o równoległych od pozostałych aksjomatów geometrii. Adrien Marie de Legendre (1752 - 1833) ogłosił tego rodzaju próbę dowodu w swej pracy z r. 1833, a więc już po ukazaniu się publikacji

[4] S. KULCZYCKI, *Geometria nieeuklidesowa*, Warszawa: PWN 1960, 47-48.

Łobaczewskiego i Bolyaia[5]. Dopiero następne pokolenie uczonych zrozumiało i uznało idee Łobaczewskiego i Bolyaia. Dzięki temu została w pełni otwarta droga do zbudowania geometrii nieeuklidesowych.

3. Geometrie nieeuklidesowe

Nasuwa się pytanie, jakie zmiany zaistniały w myśleniu uczonych, które umożliwiły konstruowanie geometrii nieeuklidesowych. Otóż potrafiono w nowy sposób spojrzeć na system aksjomatyczny, a więc na jego terminy pierwotne i aksjomaty. Jeżeli mianowicie zapomnimy o zastanym, intuicyjnym rozumieniu terminów pierwotnych, to wówczas aksjomaty przestają być zdaniami prawdziwymi, stają się zaś jedynie warunkami nałożonymi na terminy pierwotne. Konsekwentnie sensowne staje się utworzenie teorii opartej na zaprzeczeniu aksjomatu Euklidesa z pozostawieniem niezmienionych pozostałych aksjomatów. Tego rodzaju teorię przyjęło się nazywać geometrią nieeuklidesową. Wypada podkreślić, że istotnym tu krokiem było "oderwanie się" od intuicyjnego rozumienia terminów pierwotnych. Kto potrafił na to się zdobyć, dla niego nowy rodzaj geometrii nie przedstawiał trudności pojęciowych.

Za przełomowy moment w rozwoju koncepcji geometrii należy uznać dzień 10 czerwca 1854 roku, w którym Bernhard Riemann (1826 - 1866) wygłosił wykład habilitacyjny pt. *O hipotezach, na których opiera się geometria*. W samym odczycie Riemann wprowadził pojęcie przestrzeni jako tzw. rozmaitości różniczkowej o dowolnej liczbie wymiarów, jak też o zmiennej krzywiźnie, stwarzając jednocześnie nową ogólną dziedzinę wiedzy, którą zwiemy geometrią Riemanna. Jej bardzo szczególnymi przypadkami są zarówno geometria euklidesowa i geometrie nieeuklidesowe. w których krzywizna jest stała, natomiast wymiar przestrzeni nie przekracza liczby trzy[6].

Zaprzeczenie aksjomatu o równoległych może przyjąć jedną z dwu postaci, a więc bądź: (a) nie istnieje żadna prosta równoległa do danej prostej przechodząca przez punkt poza nią leżący, bądź: (b) istnieje wiele prostych równoległych do danej prostej przechodzącej przez punkt poza nią leżący. Z tego względu otrzymujemy dwa rodzaje geometrii nieeuklidesowej. Przyjęło się nazywać je, odpowiednio, geometrią eliptyczną i geometrią hiperboliczną. Geometria skonstruowana przez Łobaczewskiego i Bolyaia jest geometrią hiperboliczną, w której przestrzeń ma krzywiznę ujemną. Dopiero jakiś czas po odczycie Riemanna zrozumiano, że daje się skonstruować także geometria eliptyczna, w której przestrzeń ma krzywiznę dodatnią. Geometria euklidesowa bywa nazywana geometrią paraboliczną. Ta nomenkla-

---

[5] *Tamże*, 37.

[6] D. J. STRUIK, *Krótki zarys historii matematyki*, Warszawa: PWN 1963, 244-245; S. KULCZYCKI, *dz. cyt*., 49; TENŻE, O wykładzie habilitacyjnym Riemanna, *Wiadomości Matematyczne* 1(1955-1956), 180-193.

tura wykorzystuje fakt istnienia trzech stożkowych, tj. elipsy, hiperboli i paraboli, oraz ich specyficznych własności związanych w naturalny niejako sposób z aksjomatem Euklidesa i dwoma postaciami jego zaprzeczenia.

A zatem ewolucja geometrii rozpoczynająca się od geometrii Euklidesa i idąca poprzez dwu i trójwymiarowe geometrie nieeuklidesowe o stałej krzywiźnie doprowadziła do powstania geometrii wielowymiarowych o zmiennych krzywiznach. Dzieje powstania geometrii Riemanna mogą służyć jako przykład dobrze ilustrujący trudności, które muszą zostać pokonane, aby umysł ludzki mógł oderwać się od utartych szlaków myślenia i przejść do szerokich, oryginalnych uogólnień[7].

Jest niewątpliwe, że nowe spojrzenie na system aksjomatyczny stanowi - o czym już wspominano - poszerzenie dawnego klasycznego sposobu ujmowania układu aksjomatycznego. Tutaj, w nowym ujęciu, desygnatami terminów pierwotnych mogą być dowolne obiekty, byleby spełniały one założone w systemie aksjomaty. Nie jest więc ważne, czym one są, chodzi o to, aby spełnione były aksjomaty. W konsekwencji takiego stanowiska geometria euklidesowa utraciła swoją dotychczasową pozycję. Przestała być jedyną możliwą geometrią, stała się natomiast jedną z możliwych geometrii. Można to uznać za wynik rewolucji intelektualnej, która dokonała się w pojmowaniu teorii geometrycznej.

W takiej sytuacji nasuwają się dwa wnioski. Po pierwsze, w każdym rodzaju, skonstruowanej w opisany sposób geometrii, rozważanej samej w sobie można mówić jedynie o jej wewnętrznej niesprzeczności, a więc tylko o "prawdzie wewnętrznej", nie zaś o prawdzie w znaczeniu obiektywnym. Po drugie, jedynie doświadczenie, a więc odwołanie się do empirii, może rozstrzygnąć, który rodzaj geometrii obowiązuje w naszej przestrzeni fizycznej, czyli, innymi słowy, która z geometrii wiernie ją opisuje. Rozważmy bliżej ten aspekt problematyki geometrycznej.

4. Geometria przestrzeni fizycznej

Jest rzeczą wiadomą, że przestrzeń kosmiczna jest olbrzymia. Nasze poznanie sięga wprawdzie na wielkie odległości, jednakże nie znamy wystarczająco dokładnie przestrzennego ogromu Wszechświata. Toteż nie jest łatwo udzielić jednoznacznej odpowiedzi na pytanie, jaki rodzaj geometrii obowiązuje w przestrzeni fizycznej.

Na podstawie danych, którymi rozporządzamy, przyjmuje się, że w Kosmosie lokalnie (mamy na myśli nasze najbliższe otoczenie, a więc w szczególności układ słoneczny) obowiązuje geometria euklidesowa. W przypadku aspektu globalnego niezbędne jest odwołanie się do teorii fizykalnej. Do chwili obecnej mamy do

[7] N. BOURBAKI, *Elementy historii matematyki*, Warszawa: PWN 1980, 170.

dyspozycji jedną tylko tego rodzaju teorię. Jest nią ogólna teoria względności, czyli relatywistyczna teoria grawitacji.

Jej twórca Albert Einstein (1879 - 1955) powiązał ze sobą przestrzeń i materię. Przyjął, że między nimi zachodzi nieustanne oddziaływanie. Przestrzeń oddziałuje na materię, ta zaś - na przestrzeń. Mamy przeto do czynienia ze szczególnego rodzaju dynamizmem w Kosmosie. Stąd też pojawiła się konieczność uwzględnienia przy opisie zdarzeń, zjawisk zachodzących w przyrodzie, parametru czasu, a więc, innymi słowy, konieczność połączenia czasu z przestrzenią. W wyniku takiego stanu rzeczy Einstein zaczął posługiwać się pojęciem czasoprzestrzeni. Korzystając z riemannowskiej koncepcji geometrii przyjął, że w skali kosmicznej przestrzeń jest nieeuklidesowa, zakrzywiona. Założył, że właściwym modelem dla ogólnej teorii względności jest czterowymiarowa czasoprzestrzeń Riemanna. Siły grawitacji są efektem struktury czasoprzestrzeni, która z kolei jest powodowana obecnością ciał ważkich. Według ogólnej teorii względności przestrzeń mówi materii, jak ma się poruszać, ta zaś ze swej strony mówi przestrzeni, jak ma się zakrzywiać[8].

A ponieważ wspomniane wzajemne oddziaływania zachodzą nieustannie, przeto geometria naszej przestrzeni fizycznej w skali globalnej może się zmieniać. Przestrzeń może zmieniać wielkość swego zakrzywienia, może także przechodzić od jednego rodzaju geometrii do drugiego. Widoczny jest więc postęp, jaki się dokonał w geometrycznym opisie naszej przestrzeni zaczynając od czasu Euklidesa aż do powstania ogólnej teorii względności.

Przyjrzyjmy się, jakie wnioski stąd płyną w odniesieniu do klasycznej koncepcji prawdy[9].

5. Prawda w geometrii

Już sygnalizowaliśmy, że rozważając konkretną geometrię "samą w sobie", można mówić jedynie o jej prawdzie wewnętrznej, a więc o niesprzeczności jej aksjomatów i wynikającej stąd niesprzeczności jej twierdzeń. Mielibyśmy więc tu do czynienia z koherencyjną teorią prawdy.

Sygnalizowaliśmy także, że jedynie odwołanie się do empirii, do doświadczenia może udzielić odpowiedzi na pytanie, który rodzaj geometrii obowiązuje w realnej przestrzeni. W tym przypadku niezbędne jest posłużenie się klasyczną koncepcją prawdy.

---

[8] A. K. WRÓBLEWSKI, J. A. ZAKRZEWSKI, *Wstęp do fizyki*, tom 2, część 1, Warszawa: PWN 1989, 306; A. JANUSZAJTIS, *Fizyka dla politechnik*, tom 2, Pola, Warszawa: PWN 1982, 86.

[9] B. CHWEDEŃCZUK, *Spór o naturę prawdy*, Warszawa : PIW 1984.

Zbudowanie geometrii nieeuklidesowych mogłoby sugerować zrelatywizowanie prawdy. Ale to byłby tylko pozór. Przeprowadzone powyżej rozumowanie wskazuje, że jest inaczej. Mamy do czynienia nie tyle z relatywizacją prawdy, ile raczej z ukazaniem, z punktu widzenia nauk przyrodniczych, zasadności oraz niezbędności klasycznej koncepcji prawdy. Można przecież, bez obawy popełnienia pomyłki, powiedzieć, że ogólna teoria względności zakłada klasyczną koncepcję prawdy. Nauce chodzi o coraz pełniejsze poznawanie rzeczywistości. Różnego rodzaju geometrie służą nauce jako różne języki do opisu rzeczywistości. Co więcej, jest widoczne, że klasyczna koncepcja prawdy zawiera w sobie, w odpowiednim rozumieniu tego zwrotu, zarówno koherencyjną koncepcję prawdy, jak też teorię oczywistości wysuniętą przez Heinricha Rickerta (1863 - 1936).

Dziś mówi się, że geometria ujęta aksjomatycznie, w nowoczesnym rozumieniu tego terminu, orzeka o wszystkich jej modelach. To orzekanie ma charakter wypowiedzi prawdziwych w sensie koherencyjnej koncepcji prawdy. Natomiast w każdym konkretnym modelu twierdzenia geometrii są prawdziwe w znaczeniu klasycznym, tj. zgodne z rzeczywistością danego modelu. Mielibyśmy więc do czynienia z interesującym metanaukowym faktem "jednoczenia" nieklasycznych koncepcji prawdy pod egidą jej koncepcji klasycznej.

GEOMETRY AND THE CORRESPONDENCE THEORY OF TRUTH

(Summary)

Starting points of geometry date from time being within human everlasting memory. Axiomatised by Euclid and know as the Euclidean one, geometry was treated until the end of the 18th century as a set of absolutely true statements about real space. One of the axioms aroused the remarkable interest. Two centuries of trials to prove this axiom from the other ones became unsuccessful. In the 19th century it became clear it to be independent from them. Consequently, there can exist geometries built on a denial of the above mentioned axiom, i.e. the non-Euclidean geometries are possible. Thus, the Euclidean geometry has lost its hitherto existing position. It has ceased to be the only possible one, it has become to be one of possible geometries. This meta-scientific fact has widened our mental horizons, namely:

1) it has enlarged a denotation of the term "geometry",

2) it has shown it to be possible only to talk about an "internal" truth when concerning geometry taken in itself,

3) it has taught only experience to be able to decide which kind of geometry is valid in the physical space; so we cannot refuse the correspondence theory of truth.